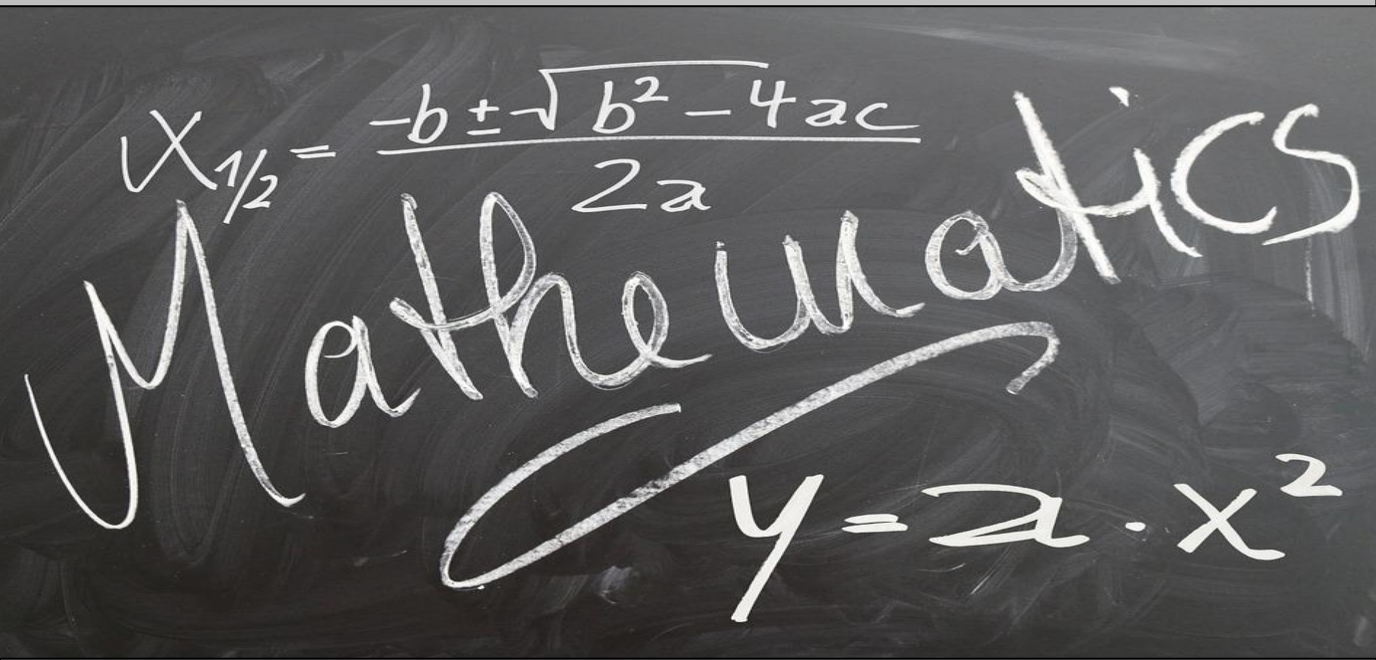
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

www.askisopolis.gr

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ



ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:

-Θετικών σπουδών

-Οικονομίας και Πληροφορικής

2019-2020

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ 3 ΩΡΩΝ

Ονοματεπώνυμο:………………………………………………… ΒΑΘΜΟΣ: ……./100 ή ……./20

ΘΕΜΑ Α (25 Μονάδες)

Α1). Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. **(Μονάδες 4)**

Α2). Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano. **(Μονάδες 4)**

Α3). Α) Να χαρακτηρίσετε με (Σ) αν είναι σωστός ή με (Λ) αν είναι λάθος κάθε ένας από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

I) Αν μία συνεχής συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα τότε και το σύνολο τιμών του είναι κλειστό διάστημα. **(Μονάδες 2)**

II) Αν f συνεχής συνάρτηση τότε η αντίστροφή της f^{-1} είναι συνεχής. **(Μονάδες 2)**

Β) Να αιτιολογήσετε καθεμία από τις απαντήσεις στο α) ερώτημα. **(Μονάδες 3Χ2=6)**

Α4). Να χαρακτηρίσετε με (Σ) αν είναι σωστός ή με (Λ) αν είναι λάθος καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] τότε είναι συνεχής στα $x1 = \alpha\, , x2 = \beta$.

β) Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και στο διάστημα (β,γ) τότε είναι συνεχής στο β.

γ) Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi o} f(x) = \lambda\, , \lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to xo} f(f(x)) = f(\lambda)$.

δ) Μία πολυωνυμική συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 1\, , x > 0 \\ x - 1\, , x < 0 \end{cases}$ είναι συνεχής.

στ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο xo και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο xo, τότε η σύνθεση της f με την g είναι συνεχής στο xo.

ζ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ έχει δύο σημεία ασυνέχειας. **(Μονάδες 7Χ1=7)**

ΘΕΜΑ Β (25 Μονάδες)

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$x \cdot f(x) \leq ημ(ημ2x)$ (1) και $g^3(x) + g(x) = x^3$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1). Να δείξετε ότι $f(0) = 2$ αν η f είναι συνεχής στο μηδέν. **(Μονάδες 7)**

Β2). Να δείξετε ότι $-|x^3| \leq g(x) \leq |x^3|$ και συνέχεια ότι η g είναι συνεχής στο μηδέν. **(Μονάδες 10)**

Β3). Για $x > 0$ να δείξετε ότι $g(x) > 0$. **(Μονάδες 3)**

Β4). Αν οι f,g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(2) < g(2)$ τότε να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_o \in (0,2)$. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Γ (25 Μονάδες)

Έστω η συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $4f^2(x) - 4xf(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x) = 2f(x) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1). Να δείξετε ότι η συνάρτηση g διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

Γ2). Αν $f(0) > 0$ να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 5)**

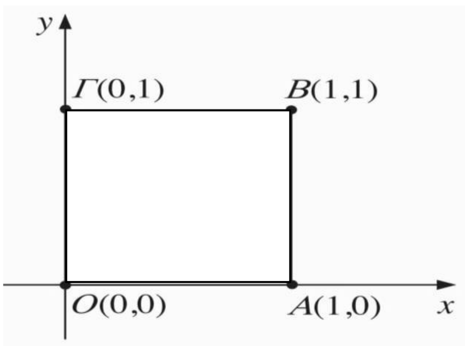
Γ3) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2020$ είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$. **(Μονάδες 5)**

Έστω η συνάρτηση $h(x) = e^x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ4) Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και έχει αντίστροφη την $h^{-1}(x) = \ln\big(f(x)\big)$, $x \in h(\mathbb{R})$. **(Μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ Δ (25 Μονάδες)

Έστω η δασική έκταση του παρακάτω σχήματος. Ένας δρομέας ξεκινά από το σημείο Ο και θέλει να φτάσει στο σημείο Β. Ο δρομέας ακολουθεί ένα μονοπάτι το οποίο ταυτίζεται με την γραφική παράσταση μίας συνεχούς συνάρτησης f.



Δ1). Μία μέρα ο δρομέας ξεκινάει από το Ο στις 8 π.μ. και φτάνει στο Β στις 10 π.μ. Την επόμενη μέρα ξεκινάει από το Β στις 8 π.μ. και φτάνει στο Ο στις 10 π.μ. ακολουθώντας το ίδιο μονοπάτι. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο μέρες.

(3 Μονάδες)

Δ2). Αν με την παραπάνω διαδρομή ο δρομέας διανύει 10 Km, να αποδείξετε ότι υπάρχουν στην διαδρομή δύο σημεία Κ και Λ που απέχουν μεταξύ τους 5 Km και ο δρομέας διανύει την απόσταση ΚΛ σε 1 ώρα. **(5 Μονάδες)**

Ένας λύκος τριγυρίζει μέσα στο δάσος, προκειμένου να βρει ένα θήραμα να επιτεθεί, ακολουθώντας ένα άλλο μονοπάτι το οποίο ταυτίζεται με την γραφική παράσταση μίας συνεχούς συνάρτησης g, της οποίας η γραφική παράσταση δεν βγαίνει έξω από το τετράγωνο ΟΑΒΓ.

Δ3). Να αποδείξετε ότι ο λύκος θα συναντήσει τον δρομέα σε σημείο με τετμημένη $xo \in [0,1]$.

(5 Μονάδες)

Δ4). Έστω και το σημείο $\Omega\left(1, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Αν $(\mathrm{OB}) > (\mathrm{O\Omega})$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\mathrm{M}(\mathrm{xo}, 0)$ με $\mathrm{xo} \in (0,1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $(\mathrm{MB})^{2020} - (\mathrm{M\Omega})^{2020} = (\mathrm{MO})^3 + (\mathrm{MA})^3$.

(7 Μονάδες)

Δ5). Αν για τις f,g ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{\nu}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ με $\nu \in \mathbb{N}$ και $\nu > 3$, τότε να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi 1, \xi 2 \in [0,1]$ τέτοια ώστε $f(\xi 1) = g(\xi 2)$. **(5 Μονάδες)**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Νίκος Τούντας

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1).

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

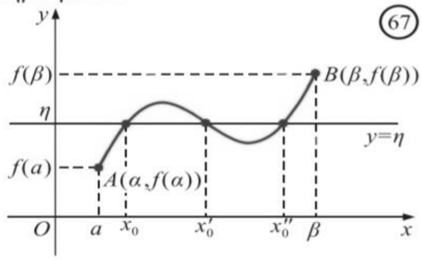
$$f(x_0) = \eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

αφού
$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και
$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■

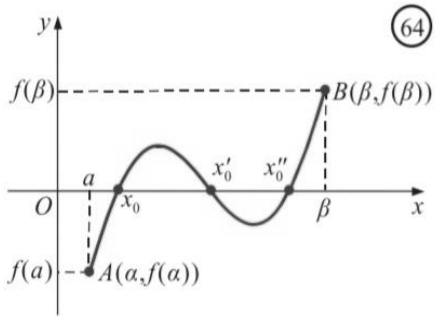


Α2).

Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.



Α3). Α). Ι). ΛΑΘΟΣ ΙΙ). ΛΑΘΟΣ

Β). Ι) Η συνάρτηση $f(x) = 2020$ με πεδίο ορισμού το $[0,2020]$έχει σύνολο τιμών το μονοσύνολο $\{2020\}$. (**ΣΗΜΕΙΩΣΗ: <u>Η πρόταση ισχύει μόνον για μη σταθερές συνεχείς συναρτήσεις</u>** αφού από Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής και από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα).

II) Αν $f(x)=\begin{cases} x & ,x<0 \\ x-2020 & ,x\geq 1\end{cases}$ τότε για $\chi<0$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και για $\chi \geq 1$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Η αντίστροφη έχει τύπο $f^{-1}(x)=\begin{cases} x & ,x<0 \\ x+2020, & x\geq 0\end{cases}$ η οποία είναι ασυνεχής γιατί $\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(x)=2020$ και $f(0)=2020$.

Α4). α) Λάθος **ε) Σωστό**

β) Λάθος **στ) Λάθος**

γ) Λάθος **ζ) Λάθος**

δ) Σωστό

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1). $x\cdot f(x)\leq \eta\mu(\eta\mu 2x)$ για $x>0$: $f(x)\leq \frac{\eta\mu(\eta\mu 2x)}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu 2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}\frac{\eta\mu(\eta\mu 2x)}{\eta\mu 2x}\right)=2$

Γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}\right)=\left(\text{Θέτω } u=2x \Rightarrow x=\frac{u}{2}\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(2\frac{\eta\mu u}{u}\right)=2$ και

Και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu 2x)}{\eta\mu 2x}=(\text{Θέτω } \eta\mu 2x=u)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\eta\mu u}{u}\right)=1$

για $x<0$: $f(x)\geq \frac{\eta\mu(\eta\mu 2x)}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)\geq \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu 2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x}\frac{\eta\mu(\eta\mu 2x)}{\eta\mu 2x}\right)=2$

Άρα τελικά $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2=f(0)$ γιατί f συνεχής στο μηδέν.

Β2). $g^3(x)+g(x)=x^3 \Leftrightarrow g(x)(g^2(x)+1)=x^3 \Leftrightarrow g(x)=\frac{x^3}{g^2(x)+1} \Rightarrow |g(x)|=\left|\frac{x^3}{g^2(x)+1}\right|=\frac{|x^3|}{g^2(x)+1}\leq |x^3| \Rightarrow$

$\Rightarrow -|x^3|\leq g(x)\leq |x^3|$ και Για $x=0$: $g(0)=0$

Και από κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0=g(0)$ άρα η g είναι συνχής στο μηδέν.

Β3). Από προηγούμενο ερώτημα $g(x)=\frac{x^3}{g^2(x)+1}>0$ για κάθε $x>0$ γιατί $x^3>0$ και $g^2(x)+1\geq 1>0$

Β4). Θέτω $k(x)=f(x)-g(x)$, $x\in\mathbb{R}$

Η k είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

$k(0)=f(0)-g(0)=2-0=2>0$ και $k(2)=f(2)-g(2)<0$ άρα $k1k2<0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $xo\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $k(xo)=0 \Leftrightarrow f(xo)=g(xo)$ άρα οι f,g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη $xo\in(0,2)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1). $4f^2(x)-4xf(x)=4 \Leftrightarrow 4f^2(x)-4xf(x)+x^2=x^2+4 \Leftrightarrow (2f(x)-x)^2=x^2+4 \Leftrightarrow g^2(x)=x^2+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |g(x)|=\sqrt{x^2+4}\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $g(x)\neq 0$ και η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών άρα η g διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Γ2). $g(0)=2f(0)>0$ άρα από προηγούμενο ερώτημα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $g(x)=\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow 2f(x)-x=\sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ3). Για κάθε $x1, x2>0$ με $x1<x2 \Rightarrow \frac{χ1}{2}<\frac{x2}{2}$

$\Rightarrow x1^2<x2^2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{\sqrt{x1^2+4}}{2}<\frac{\sqrt{x2^2+4}}{2}$ άρα τελικά $f(x1)<f(x2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$: $f\big((0,+\infty)\big)=\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(1,+\infty)$

(Τα όρια υπολογίζονται εύκολα) Επειδή το $-2020\notin f\big((0,+\infty)\big)=(1,+\infty)$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$

Γ4). $h(x)=e^x-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

Για κάθε $x1, x2\in\mathbb{R}$ με $x1<x2 \Rightarrow e^{x1}<e^{x2}$

$$\Rightarrow -x1>-x2 \Rightarrow e^{-x1}>e^{-x2} \Rightarrow -e^{-x1}<-e^{-x2}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη $h(x1)<h(x2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται

Επειδή η h συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και γνησίως αύξουσα τότε:

$h(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} h(x), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right)=\mathbb{R}$ (Τα όρια υπολογίζονται εύκολα)

Για $x\in\mathbb{R}$ και $y\in\mathbb{R}$: $y=f(x) \Rightarrow y=e^x-e^{-x} \Rightarrow y=\frac{e^{2x}-1}{e^x} \Rightarrow e^{2x}-e^xy-1=0$

Θέτω $\omega=e^x>0$ άρα $\omega^2-\omega y-1=0$ $\Delta=y^2+4>0$

Άρα $\omega_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$ και επειδή $y-\sqrt{y^2+4}<0$ αφού $y<\sqrt{y^2+4} \Rightarrow y^2<y^2+4 \Rightarrow 4>0$ ΙΣΧΥΕΙ

Και το $\omega=e^x>0$ τότε $e^x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} \Rightarrow x=\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)$, $y\in\mathbb{R}$

Άρα τελικά $h^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)=\ln\big(f(x)\big)$, $x\in\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1). Έστω $f1(t), f2(t)$, $t \in [8,10]$ οι συναρτήσεις που εκφράζουν την διαδρομή του δρομέα την πρώτη και την δεύτερη μέρα αντίστοιχα. Αν το μονοπάτι έχει μήκος s Km τότε ισχύει:

$$f1(8) = 0 = f2(10) \quad \text{και} \quad f1(10) = s = f2(8)$$

Έστω $h(t) = f1(t) - f2(t), t \in [8,10]$

Η h είναι συνεχής συνάρτηση ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων αφού οι συναρτήσεις θέσεως είναι συνεχείς συναρτήσεις.

$h(8) \cdot h(10) = -s^2 < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει to $\in [8,11]$ τέτοιο ώστε $h(to) = 0 \Rightarrow f1(to) = f2(to)$

Άρα αποδείξαμε το ζητούμενο.

Δ2). Έστω $f(t)$, $t \in [8,10]$ η συνάρτηση που εκφράζει το μήκος της διαδρομής από το σημείο Ο την χρονική στιγμή t τότε: $f(8) = 0$ και $f(10) = 10$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $t1 \in [8,9]$ τέτοιο ώστε $f(t1) + 5 = f(t1 + 1)$, $t1 \in [8,9]$ γιατί $t1 + 1 \leq 10 \Rightarrow t1 \leq 9$

Έστω $n(t) = f(t) - f(t + 1) + 5$, $t \in [8,9]$

Η n είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

$n(8) = f(8) - f(9) + 5 = 5 - f(9)$ και $n(9) = f(9) - f(10) + 5 = f(9) - 5$

$n(8) \cdot n(9) = -(f(9) - 5)^2 < 0$ Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $t1 \in [8,9]$ τέτοιο ώστε

$n(t1) = 0 \Leftrightarrow f(t1) + 5 = f(t1 + 1)$ άρα αποδείξαμε το ζητούμενο.

Δ3). Αφού η συνάρτηση f ξεκινά από το Ο και καταλήγει στο Β τότε ισχύει: $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

Επίσης η συνάρτηση g δεν βγαίνει έξω από το τετράγωνο ΟΑΒΓ άρα: $0 \leq g(x) \leq 1$

Έστω η συνάρτηση $b(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [0,1]$

Η b είναι συνεχής συνάρτηση ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$b(0) = f(0) - g(1) = 0 - g(0) = -g(0) \leq 0$ και $b(1) = f(1) - g(1) = 1 - g(1) \geq 0$ Άρα $b(0) \cdot b(1) \leq 0$

Αν $b(0) \cdot b(1) = 0$ τότε $b(0) = 0$ ή $b(1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ή $f(1) = g(1)$

Αν $b(0) \cdot b(1) < 0$ τότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει $xo \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $b(xo) = 0 \Leftrightarrow f(xo) = g(xo)$

Άρα τελικά υπάρχει $xo \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $b(xo) = 0 \Leftrightarrow f(xo) = g(xo)$ Άρα ο λύκος θα συναντήσει τον δρομέα σε σημείο με τετμημένη $xo \in [0,1]$.

Δ4). Έχουμε τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $\Gamma(0,1)$, $\Omega\left(1, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, $M(xo, 0)$

Ισχύει $OB > O\Omega \Leftrightarrow \sqrt{1+1} > \sqrt{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+1} \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+1}$

$$(MB)^{2020} - (M\Omega)^{2020} = (MO)^3 + (AM)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-xo)^2+1}^{\,2020} - \sqrt{(1-xo)^2 + f^2\left(\frac{1}{2}\right)}^{\,2020} = \sqrt{xo^2}^{\,3} + \sqrt{(xo-1)^2}^{\,3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-xo)^2+1}^{\,2020} - \sqrt{(1-xo)^2 + f^2\left(\frac{1}{2}\right)}^{\,2020} = xo^3 + (xo-1)^3$$

Έστω $r(x) = \sqrt{(1-x)^2+1}^{\,2020} - \sqrt{(1-x)^2 + f^2\left(\frac{1}{2}\right)}^{\,2020} - x^3 - (x-1)^3 \,, x \in [0,1]$

Η r είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$r(0) = \sqrt{2}^{\,2020} - \sqrt{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+1}^{\,2020} + 1 > 0$ γιατί $\sqrt{2} > \sqrt{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+1} \Leftrightarrow \sqrt{2}^{\,2020} > \sqrt{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+1}^{\,2020}$

$r(1) = 1 - f^{2020}\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -f^{2020}\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$ γιατί $0 \leq f(x) \leq 1$

Άρα $r(0) \cdot r(1) \leq 0$ και αν $r(0) \cdot r(1) = 0 \Leftrightarrow r(1) = 0$

Αν $r(0) \cdot r(1) \leq 0$ τότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει $xo \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $r(xo) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-xo)^2+1}^{\,2020} - \sqrt{(1-xo)^2 + f^2\left(\frac{1}{2}\right)}^{\,2020} = xo^3 + (xo-1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (MB)^{2020} - (M\Omega)^{2020} = (MO)^3 + (AM)^3$$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(xo, yo)$ με $xo \in (0,1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$(MB)^{2020} - (M\Omega)^{2020} = (MO)^3 + (MA)^3$$

Δ5). Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [0,1] άρα από ΘΜΕΤ έχουν μία μέγιστη τιμή M1,M2 αντίστοιχα και μία ελάχιστη τιμή m1,m2 αντίστοιχα.

Επίσης από ΘΕΤ τα $[m1, M1]$, $[m1, M2]$ είναι τα σύνολα τιμών των f,g στο [0,1] αντίστοιχα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Επειδή η f γνωρίζουμε ότι ξεκινάει από το O και καταλήγει στο B τότε ισχύει ότι $m1 = 0$, $M1 = 1$.

$$m1 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq M1$$

$$m1 \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \leq M1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$m1 \leq f\left(\frac{1}{\nu}\right) \leq M1$$

Προσθέτοντας κατά μέλη ισχύει: $(\nu-1)m1 \leq f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{\nu}\right) \leq (\nu-1)M1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m1 \leq \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu-1} \leq M1$$

Άρα υπάρχει $\xi 1 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi 1) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu-1}$

Εκτελώντας την ίδια διαδικασία και για την g τελικά προκύπτει:

υπάρχει $\xi 2 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $g(\xi 2) = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+g\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu-1}$

Όμως ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{\nu}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+g\left(\frac{1}{\nu}\right) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu-1} = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+g\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(\xi 1) = g(\xi 2)$$

Άρα υπάρχουν $\xi 1, \xi 2 \in [0,1]$ τέτοια ώστε $f(\xi 1) = g(\xi 2)$.